

92381

**B. A. 4th Semester
Examination – July, 2022
MATHEMATICS (Sequence and Series)**

Paper : BM-241 P-I

Time : Three hours]

[Maximum Marks : 27

Before answering the questions, candidates should ensure that they have been supplied the correct and complete question paper. No complaint in this regard, will be entertained after examination.

नों के उत्तर देने से पहले परीक्षार्थी यह सुनिश्चित कर लें कि उनको पूर्ण सही प्रश्न-पत्र मिला है। परीक्षा के उपरान्त इस संबंध में कोई भी शिकायत नहीं सुनी जायेगी।

Note : Attempt five questions in all, selecting one question from each Unit. Question No. 9 (Unit-V) is compulsory and carry 9 marks, else all questions are of 4.5 marks each.

प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न का चयन करते हुए, कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रश्न संख्या 9 (इकाई-V) अनिवार्य है और 9 अंकों का है। इसके अतिरिक्त शेष सभी प्रश्नों में प्रत्येक प्रश्न 4.5 अंकों का है।

UNIT – I

इकाई – I

1. (a) Prove that between two distinct real numbers, there are infinitely many real numbers.

सिद्ध कीजिए कि दो भिन्न वास्तविक संख्याओं के बीच अपरिमित रूप से अनेक वास्तविक संख्याएँ होती हैं।

- (b) Prove that the union of arbitrary family of open set is a open set.

सिद्ध करें कि खुले सेट के स्वेच्छ परिवार का संघ एक खुला सेट है।

2. (a) If C and D be two subsets of R , show :

$$(A \cap B)^{\circ} = A^{\circ} \cap B^{\circ}$$

यदि C और D , R के दो सबसेट हैं, तो दिखाएँ :

$$(A \cap B)^{\circ} = A^{\circ} \cap B^{\circ}$$

- (b) Prove derived set of any set is a closed set.

सिद्ध करें कि किसी भी सेट का व्युत्पन्न सेट एक बंद सेट है।

UNIT – II

इकाई – II

3. (a) Prove that every convergent sequence is bounded by not conversely.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक अभिसारी अनुक्रम व्युत्क्रम नहीं द्वारा परिबद्ध होता है।

- (b) Prove that :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^n}{|n|} \right)^{\frac{1}{n}} = e$$

सिद्ध करें कि :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^n}{|n|} \right)^{\frac{1}{n}} = e$$

4. Test the convergence of the following series :

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n^4 + 1} - \sqrt{n^4 - 1}$

(b) $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(m+1)(m+2)}$

निम्नलिखित श्रृंखला के अभिसरण का परीक्षण करें :

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n^4 + 1} - \sqrt{n^4 - 1}$

(b) $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(m+1)(m+2)}$

UNIT - III

इकाई - III

5. Test the convergence of the following series :

(i) $1 + \frac{1}{1.2.3} + \frac{x}{4.5.6} + \frac{x^2}{7.8.9} + \dots, (x > 0)$

(ii) $1 + \frac{1}{2}x + \frac{2}{3^2}x^2 + \frac{3}{4^3}x^3 + \frac{4}{5^4}x^4 + \dots, (x > 0)$

निम्नलिखित श्रृंखला के अभिसरण का परीक्षण करें :

(i) $1 + \frac{1}{1.2.3} + \frac{x}{4.5.6} + \frac{x^2}{7.8.9} + \dots, (x > 0)$

(ii) $1 + \frac{1}{2}x + \frac{2}{3^2}x^2 + \frac{3}{4^3}x^3 + \frac{4}{5^4}x^4 + \dots, (x > 0)$

6. Test the following series for convergence :

(i) $1^p + \left(\frac{1}{2}\right)^p + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^p + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^p + \dots$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$

निम्नलिखित श्रृंखला का अभिसरण के लिए परीक्षण करें :

(i) $1^p + \left(\frac{1}{2}\right)^p + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^p + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^p + \dots$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$

UNIT - IV

इकाई - IV

7. (a) Test the convergence and absolute convergence of the series :

$$1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} + \dots, (p > 0)$$

शृंखला के अभिसरण और पूर्ण अभिसरण का परीक्षण करें :

$$1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} + \dots, (p > 0)$$

(b) Show that $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} a_n$ is convergent if $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is convergent.

दिखाएँ कि $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} a_n$ अभिसारी है यदि $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ अभिसारी है।

8. (a) Show that the series $\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{3}{4}\right) + \left(1 - \frac{7}{8}\right) + \dots$, is convergent, but when parenthesis are removed, it oscillates.

दिखाएँ कि शृंखला $\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{3}{4}\right) + \left(1 - \frac{7}{8}\right) + \dots$, अभिसारी है, लेकिन जब कोष्ठक हटा दिया जाता है, यह दोलन करता है।

(b) Investigate what rearrangement of the series $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$, will reduce its sum to zero.

जाँच करें कि शृंखला $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$, की कौन-सी पुनर्व्यवस्था, इसके योग को शून्य कर देगी।

UNIT - V

इकाई - V

9. (i) Prove that infimum of a set, if exists, is unique.
सिद्ध कीजिए कि एक समुच्चय का निम्नक, यदि है, अद्वितीय है।

(ii) Is every infinite set open? Justify your answer.
क्या प्रत्येक अनंत सेट खुला है? अपने उत्तर का औचित्य साबित करें।

(c) State Cauchy first theorem on limits.

सीमा पर कौशी का प्रथम प्रमेय बताइए।

(d) Test the convergence of the series :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$$

शृंखला के अभिसरण का परीक्षण करें :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$$

(e) Given an example of a series such that $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is

divergent by $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ is convergent.